12

Geometría analítica

12.1 GRÁFICAS

Una *escala numérica* es una línea en la cual se marca la distancia entre puntos en términos de unidades iguales. Las unidades son positivas en una dirección y negativas en la dirección opuesta. El *origen* es el punto cero desde el cual se miden las distancias. En la figura 12-1 se muestra una escala numérica horizontal.

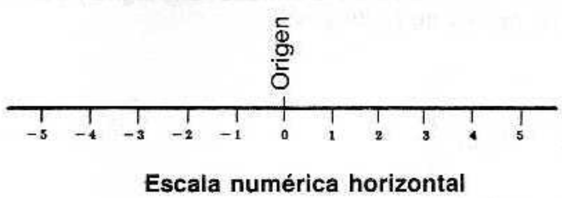


Fig. 12-1

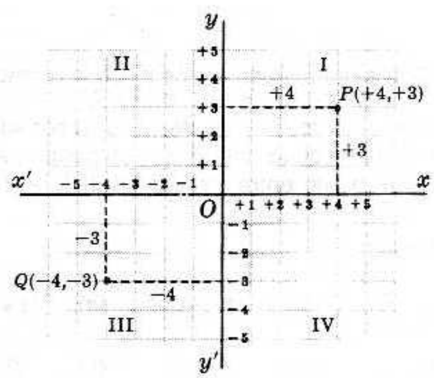


Fig. 12-2

La ***gráfica*** mostrada en la figura 12-2 se construye mediante la combinación de dos escalas numéricas colocadas en ángulo recto y de tal manera que coincidan sus ceros. La escala numérica horizontal se denota como el *eje x*, mientras que la vertical es el eje y. El punto de intersección de las dos escalas se denota como el *origen*.

Un *punto se localiza en una gráfica mediante sus coordenadas*, que son las distancias de ese punto a los ejes. La *abscisa* o *coordenada x* es la distancia del punto al eje *y*. La *ordenada* o *coordenada y* de un punto es la distancia del punto al eje *x*.

Cuando se escriben las coordenadas de un punto, la coordenada *x* precede a la coordenada *y*. Así, las coordenadas de un punto *P* en la figura 12-2 se escriben como (4,3); las de *Q* como (−4,−3). Nótese el uso de paréntesis.

Los *cuadrantes* de una gráfica son las cuatro partes delimitadas por los ejes. Los cuadrantes se enumeran como I, II, III, IV en la dirección contraria a las manecillas del reloj.

PROBLEMAS RESUELTOS

12.1 Localización de Puntos en una Gráfica

En la figura 12-3, determine las coordenadas de los puntos siguientes:

(*a*)	*B*	(*c*)	*O*	(*e*)	*N*	(*g*)	*P*	(*i*)	*R*
(*b*)	*M*	(*d*)	*L*	(*f*)	*G*	(*h*)	*Q*	(*j*)	*S*

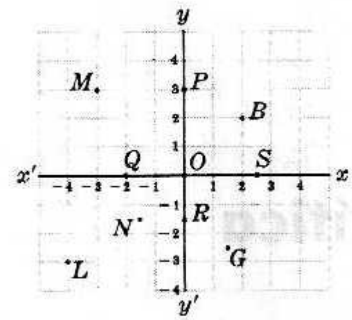


Fig. 12-3

Soluciones

(*a*)	(2,2)	(*c*)	(0,0)	(*e*)	$(-1\frac{1}{2},-1\frac{1}{2})$	(*g*)	(0,3)	(*i*)	$(0,-1\frac{1}{2})$
(*b*)	(−3,3)	(*d*)	(−4,−3)	(*f*)	$(1\frac{1}{2},-2\frac{1}{2})$	(*h*)	(−2,0)	(*j*)	$(2\frac{1}{2},0)$

12.2 Coordenadas de Puntos en los Cuatro Cuadrantes

¿Cuáles son los signos de las coordenadas de: (*a*) un punto en el cuadrante I; (*b*) un punto en el cuadrante II; (*c*) un punto en el cuadrante III; (*d*) un punto en el cuadrante IV?. Indique cuál coordenada tiene signo y cuál tiene valor cero para un punto entre los cuadrantes: (*e*) IV y I; (*f*) I y II; (*g*) II y III; (*h*) III y IV.

Soluciones

(*a*)	(+,+)	(*c*)	(−,−)	(*e*)	(+,0)	(*g*)	(−,0)
(*b*)	(−,+)	(*d*)	(+,−)	(*f*)	(0,+)	(*h*)	(0,−)

12.3 Gráfica de un Cuadrilátero

Si los vértices de un rectángulo tienen las coordenadas $A(3,1)$, $B(-5,1)$, $C(-5,-3)$, $D(3,-3)$ calcule su perímetro y su área.

Solución

La base y la altura del rectángulo son 8 y 4 (Fig. 12-4).

Por lo tanto, el perímetro es $2b + 2h = 2(8) + 2(4) = 24$, mientras que el área es $bh = (8)(4) = 32$.

12.4 Gráfica de un Triángulo

Si los vértices de un triángulo tienen las coordenadas $A(4\frac{1}{2},-2)$, $B(-2\frac{1}{2},-2)$ y $C(1,5)$, calcule su área.

Solución

La longitud de la base es $BA = 7$ (Ver la Fig. 12-5). La altura es $CD = 7$. Entonces $A = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(7)(7) = 24\frac{1}{2}$.

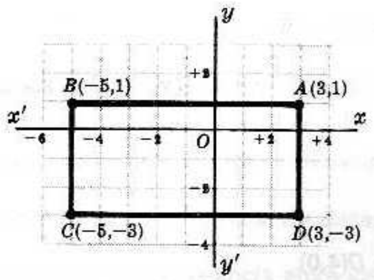


Fig. 12-4

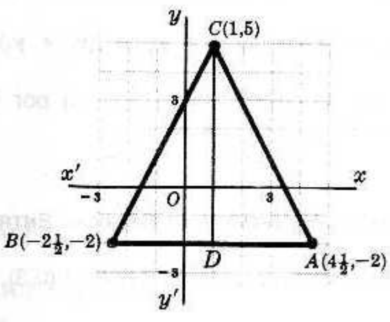


Fig. 12-5

12.2 PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO

Las coordenadas (x_m, y_m) del punto medio M de un segmento de línea que une los puntos $P(x_1,y_1)$ y $Q(x_2,y_2)$ son:

$$x_m = \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2) \qquad \text{y} \qquad y_m = \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2)$$

En la figura 12-6, el segmento y_m es la mediana del trapezoide $CPQD$ cuyas bases son y_1, y_2. Dado que la longitud de una mediana es la mitad de la suma de las bases, $y_m = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$. De manera similar el segmento x_m es la mediana del trapezoide $ABQP$ cuyas bases son x_1,x_2; por lo tanto $x_m = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$.

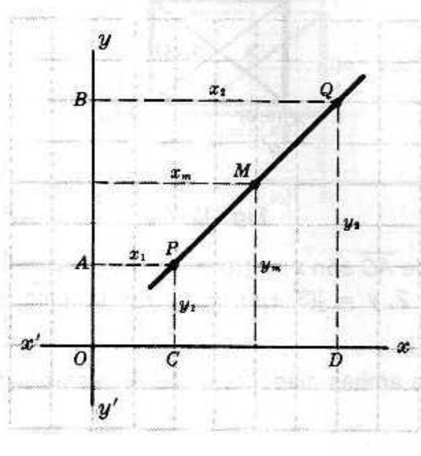


Fig. 12-6

PROBLEMAS RESUELTOS

12.5 Aplicación de la Fórmula del Punto Medio

Si M es el punto medio $\overline{PQ}$, calcule las coordenadas de (*a*) M si las coordenadas de P y Q son $P(3,4)$ y $Q(5,8)$; (*b*) Q si las coordenadas de P y M son $P(1,5)$ y $M(3,4)$.

Soluciones

(*a*) $x_m = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \frac{1}{2}(3 + 5) = 4$; $y_m = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = \frac{1}{2}(4 + 8) = 6$.

(*b*) $x_m = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, así que $3 = \frac{1}{2}(1 + x_2)$ por lo tanto $x_2 = 5$; $y_m = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$, así que $4 = \frac{1}{2}(5 + y_2)$ por lo que $y_2 = 3$.

12.6 Determinar si dos Segmentos se Bisectan Entre sí

Los vértices de un cuadrilátero son $A(0,0)$, $B(0,3)$, $C(4,3)$ y $D(4,0)$.

(*a*) Demuestre que $ABCD$ es un rectángulo.

(*b*) Demuestre que el punto medio de $\overline{AC}$ también es el punto medio de $\overline{BD}$.

(*c*) ¿Se bisectan las diagonales entre sí? ¿Por qué?

Soluciones

(*a*) De la figura 12-7, $AB = CD = 3$, también $BC = AD = 4$; por lo tanto, $ABCD$ es un paralelogramo. Dado que $\angle BAD$ es un ángulo recto, $ABCD$ es un rectángulo.

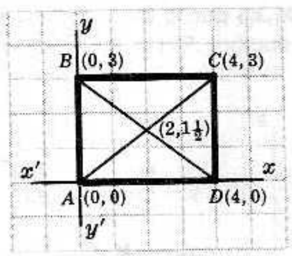


Fig. 12-7

(*b*) Las coordenadas del punto medio de $\overline{AC}$ son $x = \frac{1}{2}(0 + 4) = 2$, $y = \frac{1}{2}(0 + 3) = 1\frac{1}{2}$. Las coordenadas del punto medio de $\overline{BD}$ son $x = \frac{1}{2}(0 + 4) = 2$, $y = \frac{1}{2}(3 + 0) = 1\frac{1}{2}$. Por lo tanto, el punto $(2, 1\frac{1}{2})$ es el punto medio tanto de $\overline{AC}$ como de $\overline{BD}$.

(*c*) Sí, dado que los puntos medios de ambas diagonales son el mismo punto.

12.3 DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

Principio 1: *la distancia entre dos puntos con la misma ordenada (o valor de y) es el valor absoluto de la diferencia de sus abscisas.* (Por lo tanto, la distancia entre dos puntos debe ser *positiva*.)

Así, la distancia entre los puntos $P(6,1)$ y $Q(9,1)$ es $9 - 6 = 3$.

Principio 2: *la distancia entre dos puntos con la misma abscisa (o valor de x) es el valor absoluto de la diferencia de sus ordenadas.*

Así, la distancia entre los puntos $P(2,1)$ y $Q(2,4)$ es $4 - 1 = 3$.

Principio 3: *la distancia d entre los puntos $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$ es:*

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \text{o} \quad d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

La diferencia $x_2 - x_1$ se denota por el símbolo Δx; la diferencia $y_2 - y_1$ por el símbolo Δy. Delta (Δ) es la cuarta letra del alfabeto griego y que corresponde a la d latina. Las diferencias Δx y Δy pueden ser positivas o negativas.

PROBLEMAS RESUELTOS

12.7 Demostración y uso de la Fórmula de Distancia

(*a*) Demuestre algebraicamente la fórmula de distancia (principio 3).

(*b*) Utilice ésta para encontrar la distancia entre los puntos $A(2,5)$ y $B(6,8)$.

Soluciones

(*a*) Observe la figura 12-8. Por el principio 1, $P_1S = x_2 - x_1 = \Delta x$. Por el principio 2, $P_2S = y_2 - y_1 = \Delta y$. También, en el triángulo rectángulo $P_1S\,P_2$:

$$(P_1P_2)^2 = (P_1S)^2 + (P_2S)^2$$
$$\text{o} \quad d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$
$$\text{y} \quad d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

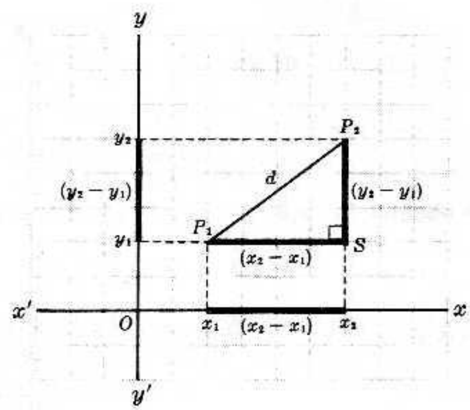


Fig. 12-8

(*b*) La distancia de $A(2,5)$ a $B(6,8)$ se encuentra como sigue:

(x, y)

$B(6,8) \rightarrow x_2 = 6,\ y_2 = 8$

$A(2,5) \rightarrow x_1 = 2,\ y_1 = 5$

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$
$$d^2 = (6-2)^2 + (8-5)^2 = 4^2 + 3^2 = 25, \text{ y } d = 5$$

12.8 Cálculo de la Distancia Entre dos Puntos

Calcule la distancia entre los puntos: (*a*) $(-3,5)$ y $(1,5)$; (*b*) $(3,-2)$ y $(3,4)$; (*c*) $(3,4)$ y $(6,8)$; $(-3,2)$ y $(9,-3)$.

Soluciones

(*a*) Dado que ambos puntos tienen la misma ordenada (o valor de y), $d = x_2 - x_1 = 1 - (-3) = 4$.

(*b*) Dado que ambos puntos tienen la misma abscisa (o valor de x), $d = y_2 - y_1 = 4 - (-2) = 6$.

(*c*) $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(6-3)^2 + (8-4)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

(*d*) $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{[9-(-3)]^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = 13$

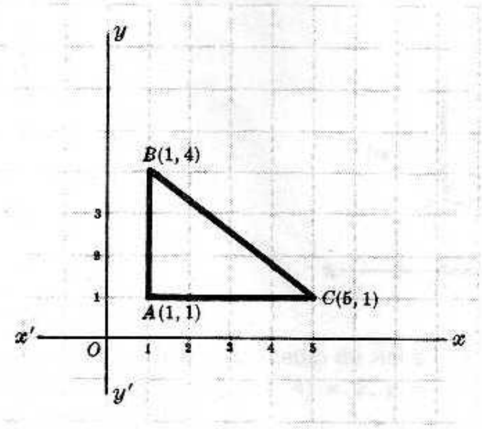
12.9 Aplicación de la Fórmula de Distancia a un Triángulo

(*a*) Calcule las longitudes de los lados de un triángulo cuyos vértices son $A(1,1)$, $B(1,4)$ y $C(5,1)$.

(*b*) Demuestre que el triángulo cuyos vértices son $G(2,10)$, $H(3,2)$, y $J(6,4)$ es un triángulo rectángulo.

Soluciones

Observe la figura 12-9.



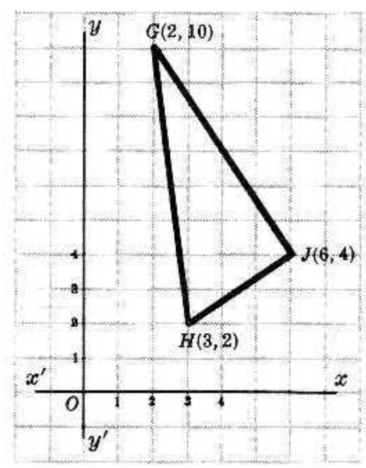


Fig. 12-9

(*a*) $AC = 5 - 1 = 4$; $AB = 4 - 1 = 3$; $BC = \sqrt{(5-1)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$.

(*b*) $(GJ)^2 = (6-2)^2 + (4-10)^2 = 52$; $(HJ)^2 = (6-3)^2 + (4-2)^2 = 13$; $(GH)^2 = (2-3)^2 + (10-2)^2 = 65$. Dado que $(GJ)^2 + (HJ)^2 = (GH)^2$, el $\triangle GHJ$ es un triángulo rectángulo.

12.10 Aplicación de la Fórmula de Distancia a un Paralelogramo

Las coordenadas de los vértices de un cuadrilátero son $A(2,2)$, $B(3,5)$, $C(6,7)$ y $D(5,4)$. Demuestre que $ABCD$ es un paralelogramo.

Solución

De la figura 12-10, se tiene:

$$AB = \sqrt{(3-2)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$
$$CD = \sqrt{(6-5)^2 + (7-4)^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$
$$BC = \sqrt{(6-3)^2 + (7-5)^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$
$$AD = \sqrt{(5-2)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

Así, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{BC} \cong \overline{AD}$. Como los lados opuestos son congruentes $ABCD$ es un paralelogramo.

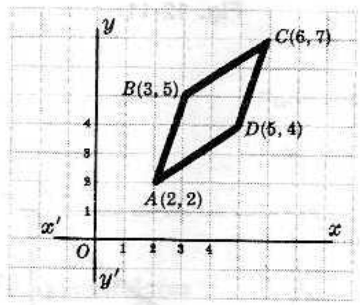


Fig. 12-10

12.11 Aplicación de la Fórmula de Distancia a un Círculo

Un círculo es tangente al eje x y tiene su centro en el punto (6,4). ¿En dónde está el punto (9,7) respecto al círculo?

Solución

Dado que el círculo es tangente al eje x, $\overline{AQ}$ en la figura 12-11 es un radio. Por el principio 2, $AQ = 4$. Por el principio 3, $BQ = \sqrt{(9-6)^2 + (7-4)^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18}$. Dado que $\sqrt{18}$ es mayor que 4, se tiene que $\overline{BQ}$ es mayor que un radio por lo tanto B está afuera del círculo.

12.4 PENDIENTE DE UNA LÍNEA

Principio 1: *si una línea pasa por los puntos $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$, entonces*

$$\text{la pendiente de } \overleftrightarrow{P_1P_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta_y}{\Delta_x}$$

Principio 2: *la línea cuya ecuación es $y = mx + b$ tiene pendiente m.*

Principio 3: *la pendiente de una línea es igual a la tangente de su inclinación.*

La inclinación i de una línea es el ángulo por arriba del eje x que está incluido entre la línea y la dirección positiva del eje x (Fig. 12-12). En la figura,

$$\text{Pendiente de } \overleftrightarrow{P_1P_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta_y}{\Delta_x} = m = \tan i$$

El valor de la pendiente es independiente del orden como se tomen los extremos. Esto es:

$$\text{Pendiente de } \overleftrightarrow{P_1P_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \text{Pendiente de } P_2P_1$$

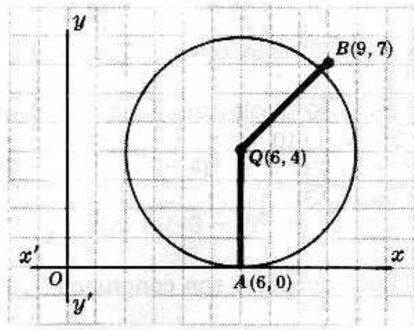


Fig. 12-11

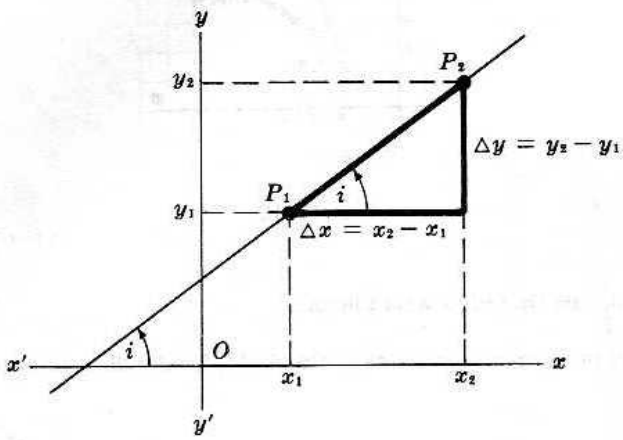
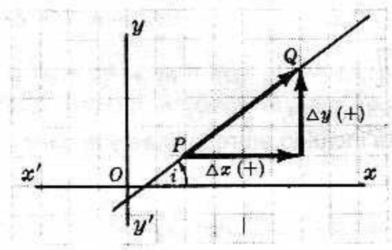


Fig. 12-12

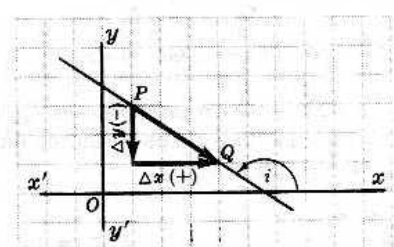
12.4A Pendientes positivas y negativas

Principio 4: *si una línea se inclina hacia arriba de izquierda a derecha, entonces su inclinación i es un ángulo agudo y su pendiente es positiva* (Fig. 12-13).



Pendiente de $PQ = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{+}{+} = +$

Fig. 12-13



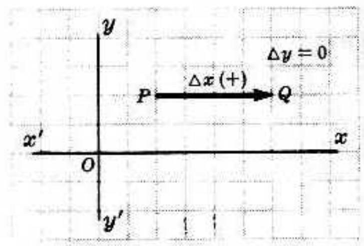
Pendiente de PQ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-}{+} = -$

Fig. 12-14

Principio 5: *si una línea se inclina hacia abajo de izquierda a derecha, entonces su inclinación es un ángulo obtuso y su pendiente es negativa* (Fig. 12-14).

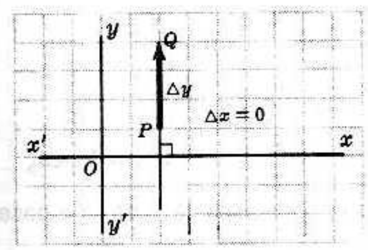
Principio 6: *si una línea es paralela al eje x entonces su inclinación es de 0° y su pendiente es 0 (Fig. 12-15).*

Principio 7: *si una línea es perpendicular al eje x entonces su inclinación es de 90° y no tiene pendiente* (Fig. 12-16).



Pendiente de $PQ = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{0}{+} = 0$

Fig. 12-15



Pendiente de $PQ = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{+}{0}$ (sin sentido)

Fig. 12-16

12.4B Pendiente de líneas paralelas y perpendiculares

Principio 8: *las líneas paralelas tienen la misma pendiente.*

En la figura 12-17, $l \parallel l'$; por lo tanto los ángulos correspondientes i, i' son iguales por lo que $\tan i = \tan i'$ o $m = m'$; donde m, m' son las pendientes de l y l' respectivamente.

Principio 9: *las líneas que tienen la misma pendiente son paralelas entre sí.* (Éste es el converso del principio 8.)

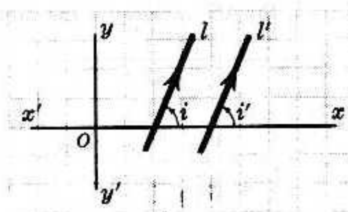


Fig. 12-17

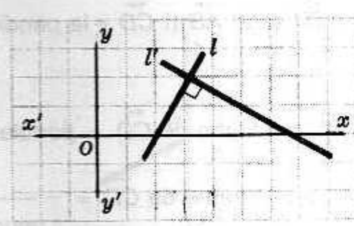


Fig. 12-18

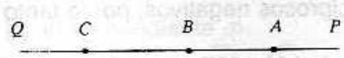
Principio 10: *las líneas perpendiculares entre sí tienen pendientes cuyos valores son recíprocos negativos entre sí.* (Los recíprocos negativos son números como 2/5 y −5/2, es decir, números cuyo producto es −1).

Así, en la figura 12-18, si $l \perp l'$, entonces $m = -1/m$ o $mm' = -1$ donde m, m' son las pendientes respectivas de l, l'.

Principio 11: *las líneas cuyas pendientes son recíprocas negativas entre sí son perpendiculares una respecto de la otra* (esto es el converso del principio 10).

12.4C Puntos Colineales

Los *puntos colineales* son aquéllos que están sobre la misma recta. Así, A, B, y C son puntos colineales:



Principio 12: *la pendiente de una línea recta es constante a lo largo de esa línea.*

Así, si $\overleftrightarrow{PQ}$ en la figura de arriba es una línea recta, la pendiente del segmento de A a B es igual a la pendiente del segmento de C a Q.

Principio 13: *si la pendiente de un segmento entre un primer punto y un segundo punto es igual a la pendiente del segmento entre cualesquiera de los puntos mencionados y otro tercero, entonces los puntos son colineales.*

PROBLEMAS RESUELTOS

2.12 Pendiente e Inclinación de una Línea

(*a*) Calcule la pendiente de la línea que pasa por $(-2,-1)$ y $(4,3)$.

(*b*) Calcule la pendiente de la línea cuya ecuación es $3y - 4x = 15$.

(*c*) Calcule la inclinación de la línea cuya ecuación es $y = x + 4$.

Soluciones

(*a*) Del principio 1, $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{3-(-1)}{4-(-2)} = \dfrac{2}{3}$

(*b*) Se puede escribir $3y - 4x = 15$ como $y = \frac{4}{3}x + 5$, *por lo que* $m = \frac{4}{3}$

(*c*) Dado que $y = x + 4$, se tiene que $m = 1$; por lo que $\tan i = 1$; finalmente $i = 45°$.

12.13 Pendientes de Rectas Paralelas y Perpendiculares

Calcule la pendiente de $\overleftrightarrow{CD}$ si (*a*) $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ y la pendiente de $\overleftrightarrow{AB}$ es $\frac{2}{3}$; (*b*) $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$ y la pendiente de $\overleftrightarrow{AB}$ es $\frac{3}{4}$.

Soluciones

(*a*) Por el principio 8, la pendiente de $\overleftrightarrow{CD}$ = pendiente de $\overleftrightarrow{AB} = \frac{2}{3}$

b) Por el principio 10, la pendiente de $\overleftrightarrow{CD} = -\dfrac{1}{\text{pendiente de } AB} = -\dfrac{1}{\frac{3}{4}} = -\dfrac{4}{3}$.

12.14 Aplicación de los Principios 9 y 11 a Triángulos y Cuadriláteros

Complete cada una de las siguientes proposiciones:

(*a*) En el cuadrilátero *ABCD*, si las pendientes de $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CD}$ y $\overleftrightarrow{DA}$ son $\frac{1}{2}$, -2, $\frac{1}{2}$, y -2, respectivamente, el cuadrilátero es un __?__.

(*b*) En el triángulo *LMP*, si las pendientes de $\overleftrightarrow{LM}$ y $\overleftrightarrow{MP}$ son 5 y $-\frac{1}{5}$ entonces *LMP* es un triángulo __?__.

Soluciones

(*a*) Dado que las pendientes de lados opuestos son iguales *ABCD* es un paralelogramo. Además, los valores de las pendientes de lados adyacentes son recíprocos negativos, por lo tanto estos lados son perpendiculares y *ABCD* es un rectángulo.

(*b*) Dado que los valores de las pendientes de $\overleftrightarrow{LM}$ y $\overleftrightarrow{MP}$ son recíprocos negativos, $\overline{LM} \perp \overline{MP}$ y el triángulo es recto.

12.15 Aplicación del Principio 12

(*a*) $\overleftrightarrow{AB}$ tiene pendiente 2 y los puntos *A*, *B* y *C* son colineales. ¿Cuáles son los valores de las pendientes de $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$?

(*b*) Calcule *y*, si $G(1,4)$, $H(3,2)$ y $J(9,y)$ son colineales.

Soluciones

(*a*) Por el principio 12, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ tienen pendiente 2.

(*b*) Por el principio 12, la pendiente de $\overleftrightarrow{GJ}$ = pendiente de $\overleftrightarrow{GH}$.
Por lo tanto $\frac{y-4}{9-1} = \frac{2-4}{3-1}$, por lo que $\frac{y-4}{8} = \frac{-2}{2} = -1$, $y = -4$.

12.5 LUGARES GEOMÉTRICOS EN GEOMETRÍA ANALÍTICA

Un lugar geométrico de puntos es el conjunto de puntos, y sólo esos puntos, que satisfacen una condición determinada. En geometría, una recta o curva (o el conjunto de rectas o curvas) en una gráfica es el lugar geométrico de puntos analíticos que satisfacen la ecuación de la recta o curva.

Es posible visualizar el lugar geométrico como la trayectoria de un punto que se mueve de acuerdo con la condición dada o como el conjunto de puntos que satisfacen dicha condición.

Principio 1: *el lugar geométrico de los puntos cuya abscisa es una constante k, es una línea paralela al eje y; su ecuación es* $x = k$. (Fig. 12-19).

Principio 2: *el lugar geométrico de los puntos cuya ordenada es una constante k es una línea paralela al eje x; su ecuación es* $y = k$. (Fig. 12-19).

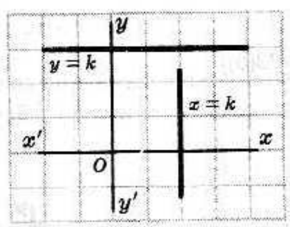


Fig. 12-19

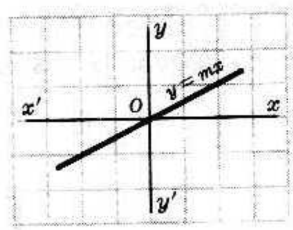


Fig. 12-20

Principio 3: *el lugar geométrico de los puntos cuya ordenada es igual al producto de una constante m por su abscisa, es una línea recta que pasa por el origen; su ecuación es* $y = mx$.

La constante *m* es la pendiente de la recta (Fig. 12-20).

Principio 4: *el lugar geométrico de puntos cuyas ordenadas y abscisas están relacionadas por alguna de las siguientes ecuaciones:*

$$y = mx + b \quad \text{o} \quad \frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

donde m y b son constantes, es una línea recta (Fig. 12-21).

En la ecuación $y = mx + b$, *m* es la pendiente y *b* es la ordenada al origen. La ecuación $\frac{y-y_1}{x-x_1} = m$ indica que la recta pasa por el punto dado (x_1,y_1) y tiene pendiente *m*.

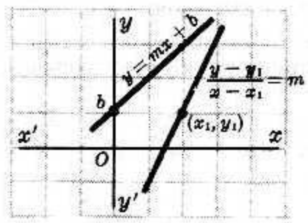


Fig. 12-21

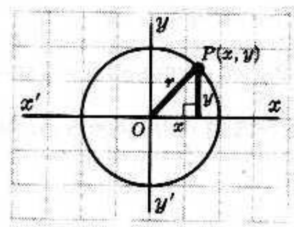


Fig. 12-22

Principio 5: *el lugar geométrico de puntos tales que la suma de los cuadrados de las coordenadas es una constante, es un círculo cuyo centro es el origen.*

La constante es el cuadrado del radio y la ecuación del círculo es:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

(Observe la figura 12-22). Nótese que para cualquier punto $P(x,y)$ sobre el círculo, $x^2 + y^2 = r^2$.

PROBLEMAS RESUELTOS

12.16 Aplicación de los Principios 1 y 2

Graficar y determinar la ecuación del lugar geométrico de los puntos (*a*) cuya ordenada es −2; (*b*) que están a 3 unidades del eje *y*; (*c*) que son equidistantes de los puntos (3,0) y (5,0).

Soluciones

(*a*) Del principio 2, la ecuación es $y = -2$; [Fig. 12-23(*a*)]

(*b*) Del principio 1, las ecuaciones son $x = 3$ y $x = -3$; [Fig. 12-23(*b*)].

(*c*) La ecuación es $x = 4$; [Fig. 12-23(*c*)].

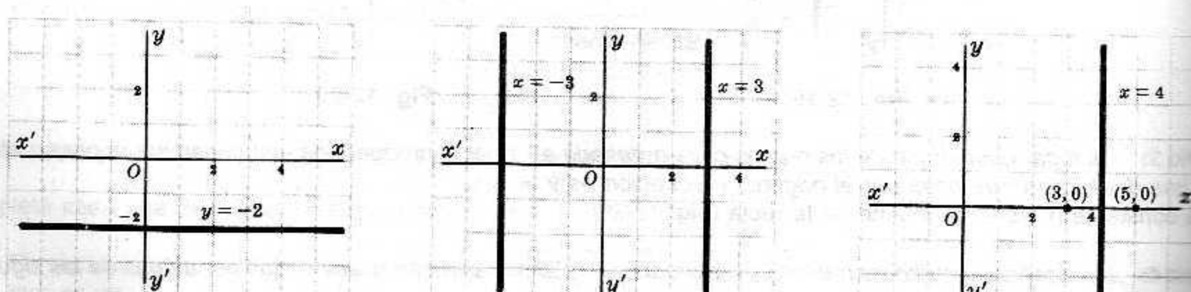


Fig. 12-23

12.17 Aplicación de los Principios 3 y 4

Grafique y describa los lugares geométricos cuyas ecuaciones son: (*a*) $y = \frac{1}{3}x + 1$; (*b*) $y = \frac{3}{2}x$; (*c*) $\frac{y-1}{x-1} = \frac{3}{4}$

Soluciones

(*a*) El lugar geométrico es una recta cuya ordenada al origen es 1 y cuya pendiente es $\frac{1}{3}$. [Fig. 12-24(*a*)].

(*b*) El lugar geométrico es una recta que pasa por el origen y tiene pendiente igual a $\frac{3}{2}$. [Fig. 12-24(*b*)].

(*c*) El lugar geométrico es un recta que pasa por el punto (1,1) y tiene pendiente $\frac{3}{4}$ [Fig. 12-24(*c*)].

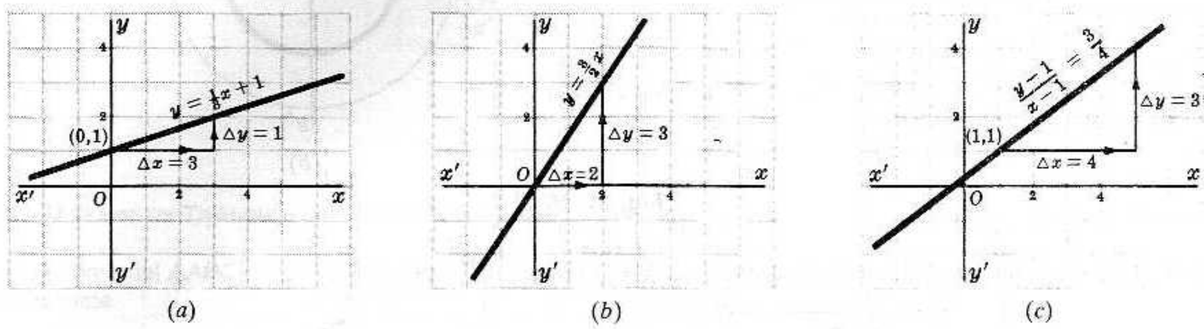


Fig. 12-24

12.18 Aplicación del Principio 5

Graficar y obtener la ecuación del lugar geométrico de los puntos (*a*) que están a dos unidades del origen; (*b*) que están a 2 unidades del lugar geométrico de $x^2 + y^2 = 9$.

Soluciones

(*a*) El lugar geométrico es un círculo cuya ecuación es $x^2 + y^2 = 4$ [Fig. 12-25(*a*)].

(*b*) El lugar geométrico es un par de círculos cada uno a 2 unidades del círculo con centro en *O* y radio 3. Sus ecuaciones son $x^2 + y^2 = 25$, $x^2 + y^2 = 1$. [Fig. 12-25(*b*)].

12.6 ÁREAS EN GEOMETRÍA ANALÍTICA

12.6A Área de un Triángulo

Si un lado de un triángulo es paralelo a cualquier eje coordenado entonces la longitud de ese lado, lo mismo que la longitud de la altura a ese lado, pueden determinarse rápidamente. En este caso la fórmula $A = \frac{1}{2}bh$ puede usarse directamente. Si ningún lado es paralelo a algún eje coordenado entonces, ya sea que:

1. El triángulo puede encerrarse en un rectángulo cuyos lados sí son paralelos a los ejes coordenados (Fig. 12-26), o:
2. Se pueden construir trapezoides cuyas bases sean paralelas al eje y al bajar perpendiculares al eje *x* (Fig. 12-27).

El área del triángulo puede calcularse ahora a partir de las áreas de las figuras así construidas:

1. En la figura 12-26, área($\triangle ABC$) = área(rectángulo *ADEF*) − [área($\triangle ABD$) + área($\triangle BCE$) + área($\triangle ACF$)].
2. En la figura 12-27, área($\triangle ABC$) = área(trapezoide *ABED*) + área(trapezoide *BEFC*) − área(trapezoide *DFCA*).

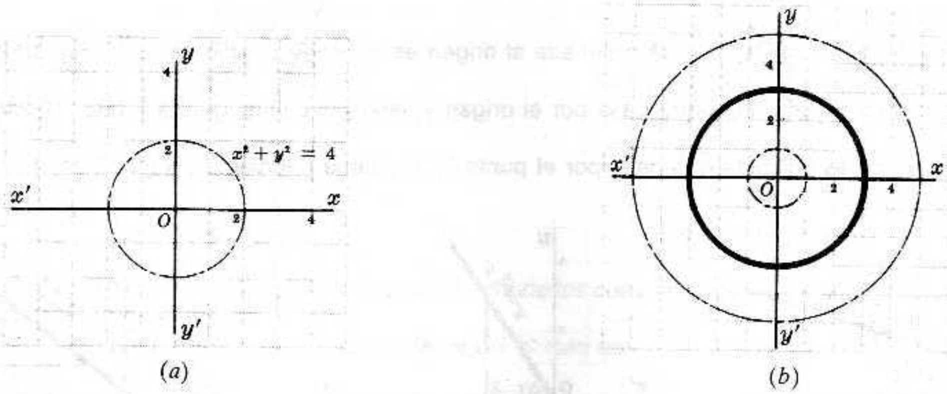


Fig. 12-25

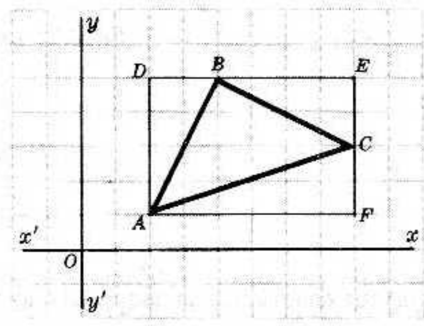


Fig. 12-26

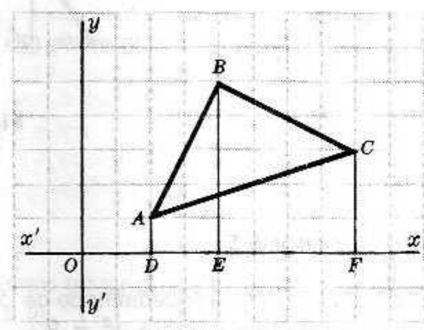


Fig. 12-27

12.6B Área de un cuadrilátero

El método del trapezoide descrito arriba puede extenderse para calcular el área de un cuadrilátero, si se conocen los vértices.

PROBLEMAS RESUELTOS

12.19 Área de un Triángulo con un Lado Paralelo a uno de los Ejes

Calcular el área de un triángulo cuyos vértices son $A(1,2)$, $B(7,2)$, $C(5,4)$.

Solución

De la gráfica del triángulo (Fig. 12-28), se tiene que $b = 7 - 1 = 6$ y que $h = 4 - 2 = 2$. Entonces $A = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(6)(2) = 6$.

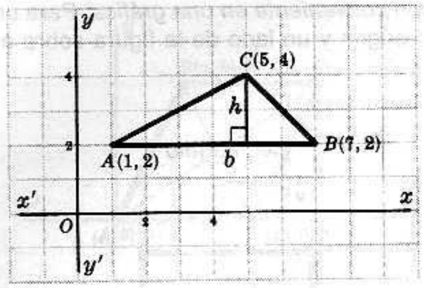


Fig. 12-28

12.20 Área de un Triángulo sin Lados Paralelos a Algún Eje

Calcule el área del $\triangle ABC$ cuyos vértices son $A(2,4)$, $B(5,8)$, $C(8,2)$, usando: (*a*) el método del rectángulo; (*b*) el método del trapezoide.

Soluciones

Observe la figura 12-29.

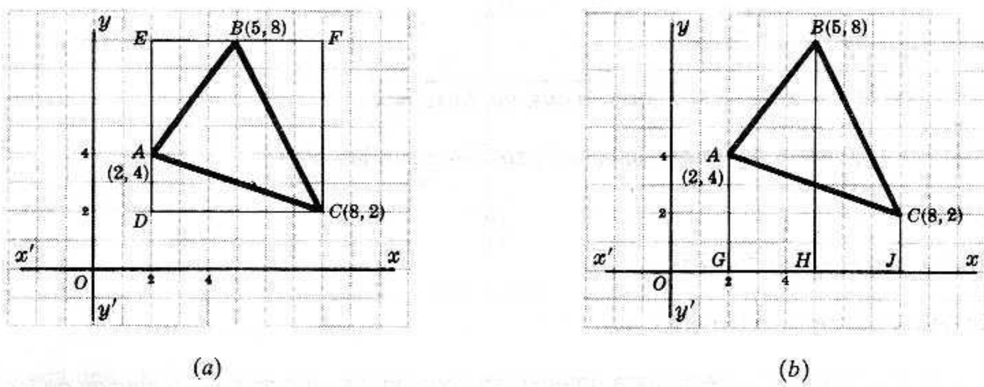


Fig. 12-29

(*a*) Área del rectángulo $DEFC = bh = 6(6) = 36$. Entonces:
Área del $\triangle DAC = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(2)(6) = 6$
Área del $\triangle ABE = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(3)(4) = 6$
Área del $\triangle BCF = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(3)(6) = 9$
Por lo tanto: área($\triangle ABC$) = área($DEFC$) + área($\triangle DAC + \triangle ABE + \triangle BCF$) = $36 - (6 + 6 + 9) = 15$.

(*b*) Área del trapezoide $ABHG = \frac{1}{2}h(b + b') = \frac{1}{2}(3)(4 + 8) = 18$.
Área del trapezoide $BCJH = \frac{1}{2}(3)(2 + 8) = 15$.
Área del trapezoide $ACJG = \frac{1}{2}(6)(2 + 4) = 18$.
Entonces: área($\triangle ABC$) = área($ABHG$) + área($BCJH$) − área($ACJG$) = $18 + 15 - 18 = 15$.

12.7 DEMOSTRACIÓN DE TEOREMAS USANDO GEOMETRÍA ANALÍTICA

Muchos teoremas de geometría plana pueden demostrarse con geometría analítica. El procedimiento para probar un teorema sigue dos pasos principales:

1. *Colocación de cada figura en posición conveniente en una gráfica*. Para un triángulo, un rectángulo o un paralelogramo, colóquense un vértice en el origen y un lado de la figura sobre el eje x. Indíquense las coordenadas de cada vértice (Fig. 12-30).

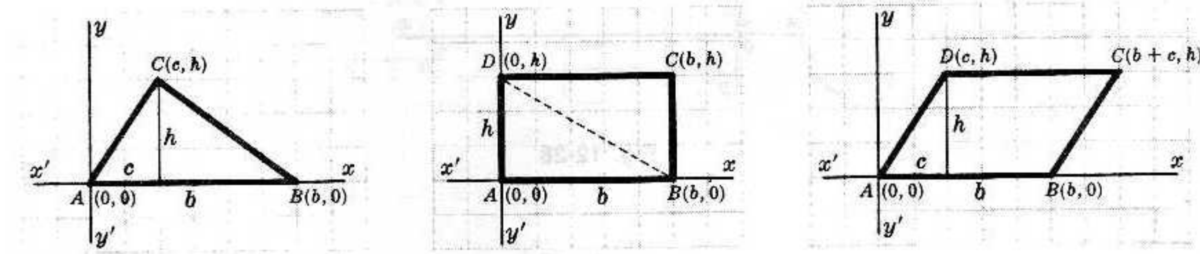


Fig. 12-30

2. *Aplicación de los principios de geometría analítica*. Por ejemplo, demuéstrese que las rectas son paralelas probando que sus pendientes son iguales; o que dos rectas son perpendiculares mediante la demostración de que sus pendientes son recíprocas negativas entre sí. Utilícese la fórmula del punto medio cuando se involucre en la demostración el punto medio de un segmento, y úsese la fórmula de distancia para evaluar la longitud de segmentos.

PROBLEMA RESUELTO

12.21 Demostración de un Teorema Mediante Geometría Analítica

Demuéstrese que las diagonales de un paralelogramo se bisectan entre sí.

Solución

Dados: $\square ABCD$, diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

Demuéstrese: $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se bisectan entre sí.

Plan: Úsese la fórmula del punto medio para obtener las coordenadas de los puntos medios de las diagonales.

Colóquese el $\square ABCD$ con el vértice A en el origen y el lado $\overline{AD}$ a lo largo del eje x (Fig. 12-31). Por lo tanto los vértices tienen coordenadas $A(0,0)$, $B(a,b)$, $C(a+c,b)$, $D(c,0)$.

Por la fórmula del punto medio, el punto medio de $\overline{AC}$ tiene las coordenadas $\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b}{2}\right)$ mientras las del punto medio de $\overline{BD}$ son $\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b}{2}\right)$

Por lo tanto, se bisectan las diagonales ya que ambos puntos medios tienen las mismas coordenadas. En consecuencia, son un solo punto.

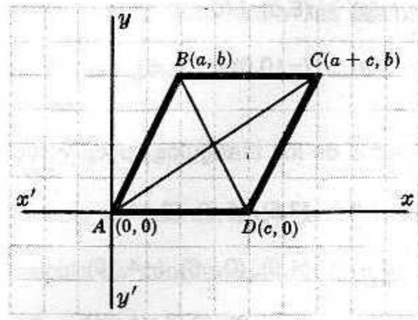


Fig. 12-31

Problemas complementarios

1. Determine las coordenadas de cada punto indicado por una letra en la figura 12-32. (12.1)

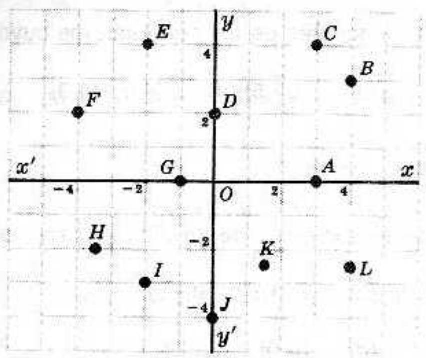


Fig. 12-32

2. Grafique cada uno de los puntos siguientes: (12.2)

$A(-2,-3)$	$C(0,-1)$	$E(3,-4)$	$G(0,3)$
$B(-3,2)$	$D(-3,0)$	$F(1\frac{1}{2},2\frac{1}{2})$	$H(3\frac{1}{2},0)$

3. Grafique los siguientes puntos: $A(2,3)$, $B(-3,3)$, $C(-3,-2)$ y $D(2,-2)$. En seguida, calcule el perímetro y el área del cuadrado *ABCD*. (12.3)

4. Grafique los puntos siguientes: $A(4,3)$, $B(-1,3)$, $C(-3,-3)$, $D(2,-3)$. En seguida, calcule el área del paralelogramo *ABCD* y del triángulo *BCD*. (12.3, 12.4)

5. Calcule el punto medio del segmento que une los puntos: (12.5)

(*a*) (0,0) y (8,6)	(*e*) (−20,−5) y (0,0)	(*i*) (3,4) y (7,6)
(*b*) (0,0) y (5,7)	(*f*) (0,4) y (0,16)	(*j*) (−2,−8) y (−4,−12)

(*c*)	(0,0) y (−8,12)	(*g*)	(8,0) y (0,−2)	(*k*)	(7,9) y (3,3)
(*d*)	(14,10) y (0,0)	(*h*)	(−10,0) y (0,−5)	(*l*)	(2,−1) y (−2,−5)

6. Calcule los puntos medios de los lados de los triángulos cuyos vértices son: (12.5)

(*a*) (0,0), (8,0), (0,6) (*d*) (3,5), (5,7), (3,11)

(*b*) (−6,0), (0,0), (0,10) (*e*) (4,0), (0,−6), (−4,10)

(*c*) (12,0), (0,−4), (0,0) (*f*) (−1,−2), (0,2), (1,−1)

7. Calcule los puntos medios de los lados de los cuadriláteros cuyos vértices sucesivos son: (12.5)

(*a*) (0,0), (0,4), (2,10), (6,0) (*c*) (−2,0), (0,4), (6,2), (0,−10)

(*b*) (−3,5), (−1,9), (7,3), (5,−1) (*d*) (−3,−7), (−1,5), (9,0), (5,−8)

8. Calcule los puntos medios de las diagonales de los cuadriláteros cuyos vértices sucesivos son: (12.5)

(*a*) (0,0), (0,5), (4,12), (8,1) (*c*) (0,−5), (0,1), (4,9), (4,3)

(*b*) (−4,−1), (−2,3), (6,1), (2,−8)

9. Calcule el centro de un círculo si los extremos de un diámetro son los puntos: (12.5)

(*a*)	(0,0) y (−4,6)	(*c*)	(−3,1) y (0,−5)	(*e*)	(a,b) y $(3a,5b)$
(*b*)	(−1,0) y (−5,−12)	(*d*)	(0,0) y $(2a,2b)$	(*f*)	$(a,2b)$ y $(a,2c)$

10. Si M es el punto medio de $\overline{AB}$, calcule las coordenadas de: (12.5)

(*a*) M si las coordenadas de A y B son $A(2,5)$, $B(6,11)$

(*b*) A si las coordenadas de M y B son $M(1,3)$, $B(3,6)$

(*c*) B si las coordenadas de A y M son $A(-2,1)$, $M(2,-1)$

11. Los puntos de trisección de $\overline{AD}$ son B y C. Calcule las coordenadas de: (12.5)

(*a*) B si las coordenadas de A y C son $A(1,2)$, $C(3,5)$

(*b*) D si las coordenadas de B y C son $B(0,5)$, $C(1\frac{1}{2},4)$

(*c*) A si las coordenadas de B y C son $B(0,6)$, $C(2,3)$

12. $A(0,0)$, $B(0,5)$, $C(6,5)$, $D(6,0)$ son los vértices del cuadrilátero $ABCD$: (12.6)

(*a*) Demostrar que $ABCD$ es un rectángulo.

(*b*) Demostrar que los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ tienen las mismas coordenadas.

(*c*) ¿Se bisectan entre sí las diagonales? ¿Por qué?

13. Los vértices del $\triangle ABC$ son $A(0,0)$, $B(0,4)$ y $C(6,0)$. (12.6)

(*a*) Si $\overline{AD}$ es la mediana a $\overline{BC}$, calcule las coordenadas de D y las del punto medio de $\overline{AD}$.

(*b*) Si $\overline{CE}$ es la mediana a $\overline{AB}$, calcule las coordenadas de E y las del punto medio de $\overline{CE}$.

(*c*) ¿Se bisectan las medianas $\overline{AD}$ y $\overline{CE}$? ¿Por qué?

14. Calcule la distancia entre cada una de las siguientes parejas de puntos. (12.8)

(*a*) (0,0) y (0,5) (*d*) (−6,−1) y (−6,11) (*g*) $(-3,-4\frac{1}{2})$ y $(-3,-4\frac{1}{2})$

(*b*) (4,0) y (−2,0) (*e*) (5,3) y (5,8.4) (*h*) (*a*,*b*) y (2*a*,*b*)

(*c*) (0,−3) y (0,7) (*f*) (−1.5,7) y (6,7)

15. Calcule las distancias, por parejas, que separan a los siguientes puntos colineales. (12.8)

(*a*) (5,−2), (5,1), (5,4) (*c*) (−4,2), (−3,2), (0,2)

(*b*) (0,−6), (0,−2), (0,12) (*d*) (0,*b*), (*a*,*b*), (3*a*,*b*)

16. Calcule la distancia entre cada una de las siguientes parejas de puntos. (12.8)

(*a*) (0,0) y (5,12) (*e*) (−3,−6) y (3,2) (*i*) (3,4) y (4,7)

(*b*) (−3,−4) y (0,0) (*f*) (2,3) y (−10,12) (*j*) (−1,−1) y (1,3)

(*c*) (0,−6) y (9,6) (*g*) (2,2) y (5,5) (*k*) $(-3,0)$ y $(0,\sqrt{7})$

(*d*) (4,1) y (7,5) (*h*) (0,5) y (−5,0) (*l*) (a,0) y (0,a)

17. Demuestre que los triángulos con los vértices que se enlistan a continuación, son isósceles. (12.9)

(*a*) $A(3,5)$, $B(6,9)$, $C(2,6)$ (*c*) $G(5,-5)$, $H(-2,-2)$, $J(8,2)$

(*b*) $D(2,0)$, $E(6,0)$, $F(4,4)$ (*d*) $K(7,0)$, $L(3,4)$, $M(2,-1)$

18. ¿Cuáles de los triángulos cuyos vértices se enlistan abajo son triángulos rectángulos? (12.9)

(*a*) $A(7,0)$, $B(6,3)$, $C(12,5)$ (*c*) $G(1,-1)$, $H(5,0)$, $J(3,8)$

(*b*) $D(2,0)$, $E(5,2)$, $F(1,8)$ (*d*) $K(-4,0)$, $L(-2,4)$, $M(4,-1)$

19. Los vértices del $\triangle ABC$ son $A(-2,2)$, $B(4,4)$ y $C(8,2)$. Calcule la longitud de la mediana a: (*a*) $\overline{AB}$; (*b*) $\overline{AC}$; (*c*) $\overline{BC}$. (12.9)

20. (*a*) Los vértices del cuadrilátero *ABCD* son $A(0,0)$, $B(3,2)$, $C(7,7)$, y $D(4,5)$. Demuestre que *ABCD* es un paralelogramo. (12.10)

(*b*) Los vértices del cuadrilátero *DEFG* son $D(3,5)$, $E(1,1)$, $F(5,3)$, y $G(7,7)$. Demuestre que *DEFG* es un rombo.

(*c*) Los vértices del cuadrilátero *HJKL* son $H(0,0)$, $J(4,4)$, $K(0,8)$, y $L(-4,4)$. Demuestre que *HJKL* es un cuadrado.

21. Calcule el radio de un círculo cuyo centro está en: (12.11)

(*a*) (0,0) y pasa por (−6,8)
(*b*) (0,0) y pasa por (3,−4)
(*c*) (0,0) y pasa por (−5,5)
(*d*) (2,0) y pasa por (7,−12)
(*e*) (4,3) y es tangente al eje *y*
(*f*) (−1,7) y es tangente a la recta $x = -4$

22. Un círculo tiene su centro en el origen y su radio mide 10. Determine si cada uno de los puntos que se enlistan a continuación está sobre, dentro o afuera del círculo: (*a*) (6,8); (*b*) (−6,8); (*c*) (0,11); (*d*) (−10,0); (*e*) (7,7); (*f*) (−9,4); (*g*) $(9,\sqrt{19})$. (12.11)

23. Calcule la pendiente de la recta que pasa por cada una de las siguientes parejas de puntos: (12.12)

(*a*) (0,0) y (5,9)
(*b*) (0,0) y (9,5)
(*c*) (0,0) y (6,15)
(*d*) (2,3) y (6,15)
(*e*) (−2,−3) y (7,15)
(*f*) (−2,−3) y (2,1)
(*g*) (3,−4) y (5,6)
(*h*) (0,0) y (−4,8)
(*i*) (3,−9) y (0,0)
(*j*) (0,−2) y (8,10)
(*k*) (−1,−5) y (1,−7)
(*l*) (−3,−4) y (−1,−2)

24. Calcule la pendiente de la recta cuya ecuación es: (12.12)

(*a*) $y = 3x - 4$
(*b*) $y = 4x - 3$
(*c*) $y = -\frac{1}{2}x + 5$
(*d*) $y = 8 - 7x$
(*e*) $y = 5x$
(*f*) $y = 5$
(*g*) $2y = 6x - 10$
(*h*) $2y = 10x - 6$
(*i*) $3y = -12x + 6$
(*j*) $3y = 12 - 2x$
(*k*) $y + x = 21$
(*l*) $2x = 12 - y$
(*m*) $\frac{1}{5}y = x - 3$
(*n*) $\frac{1}{3}y = 2x - 6$
(*o*) $\frac{1}{4}y = 7 - x$
(*p*) $\frac{1}{4}y + 2x = 1$

25. Calcule la inclinación, hasta la última unidad en grados, de cada una de las rectas siguientes: (12.12)

(*a*) $y = 3x - 1$
(*b*) $y = \frac{1}{3}x - 1$
(*c*) $2y = 5x + 10$
(*d*) $y = \frac{2}{5}x + 5$
(*e*) $5y = 5x - 3$
(*f*) $y = -3$

26. Calcule la pendiente de una recta cuya inclinación es: (*a*) 5°; (*b*) 17°; (*c*) 20°; (*d*) 35°; (*e*) 45°; (*f*) 73°; (*g*) 85°. (12.12)

27. Calcule la inclinación, hasta las unidades en grados, de una recta cuya pendiente es (*a*) 0; (*b*) 0.4663; (*c*) 1; (*d*) 1.4281; (*e*) $\frac{1}{8}$; (*f*) $\frac{1}{2}$; (*g*) $\frac{3}{4}$; (*h*) $1\frac{1}{3}$; (*i*) $2\frac{1}{5}$. (12.12)

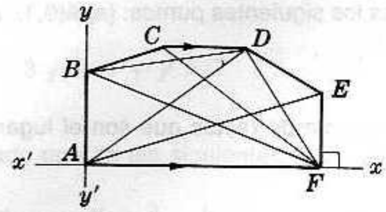


Fig. 12-33

28. En el hexágono de la figura 12-33, $\overline{CD} \parallel \overline{AF}$. ¿Qué lados o diagonales tienen: (*a*) pendiente positiva; (*b*) pendiente negativa; (*c*) pendiente cero; (*d*) no tiene pendiente?

29. Calcule la pendiente de una recta que es paralela a otra cuya pendiente es: (*a*) 0; (*b*) no tiene pendiente; (*c*) 5; (*d*) −5; (*e*) 0.5; (*f*) −0.0005. (12.13)

30. Calcule la pendiente de una recta paralela a otra cuya ecuación es: (12.13)

(*a*)	$y = 0$	(*c*)	$x = 7$	(*e*)	$y = 5x - 2$	(*g*)	$3y - 6x = 12$
(*b*)	$x = 0$	(*d*)	$y = 7$	(*f*)	$x + y = 5$		

31. Calcule la pendiente de una recta paralela a otra que pasa por (*a*) (0,0) y (2,3); (*b*) (2,−1) y (5,6); (*c*) (3,4) y (5,2); (*d*) (1,2) y (0,−4) (12.13)

32. Calcule la pendiente de una recta perpendicular a otra cuya pendiente es: (12.13)

(*a*)	$\frac{1}{2}$	(*c*)	3	(*e*)	0.1	(*g*)	$-\frac{4}{5}$	(*i*)	0
(*b*)	1	(*d*)	$2\frac{1}{2}$	(*f*)	−1	(*h*)	$-3\frac{1}{4}$	(*j*)	no tiene pendiente

33. Calcule la pendiente de una recta perpendicular a otra que pasa por: (*a*) (0,0) y (0,5); (*b*) (0,0) y (2,1); (*c*) (0,0) y (3,−1); (*d*) (1,1) y (3,3) (12.13)

34. En el rectángulo *DEFG*, la pendiente de $\overline{DE}$ es $\frac{2}{3}$. Calcule la pendiente de (*a*) $\overline{EF}$; (*b*) $\overline{FG}$; (*c*) $\overline{DG}$. (12.14)

35. En el ▱ *ABCD* la pendiente de $\overline{AB}$ es 1, mientras que la pendiente de $\overline{BC}$ es de $-\frac{1}{2}$. Calcule la pendiente de (*a*) $\overline{AD}$; (*b*) $\overline{CD}$; (*c*) la altura de $\overline{AD}$; (*d*) la altura de $\overline{CD}$. (12.14)

36. Los vértices del △*ABC* son *A*(0,5), *B*(3,7), *C*(5,−1). ¿Cuál es la pendiente de la altura de: (*a*) $\overline{AB}$; (*b*) $\overline{BC}$; (*c*) $\overline{AC}$? (12.14)

37. ¿En cuál de los siguientes conjuntos, los puntos son colineales: (*a*) (2,1), (4,4), (8,10); (*b*) (−1,1), (2,4), (6,8); (*c*) (1,−1), (3,4), (5,8)? (12.15)

38. ¿Para qué valores de k son colineales los siguientes puntos: (*a*) $A(0,1)$, $B(2,7)$, $C(6,k)$; (*b*) $D(-1,5)$, $E(3,k)$, $F(5,11)$; (*c*) $G(0,k)$, $H(1,1)$, $I(3,-1)$? (12.15)

39. Determine la ecuación de la recta o pareja de rectas que son el lugar geométrico de puntos tales que: (12.16)

(*a*) su abscisa es −5

(*b*) su ordenada es $3\frac{1}{2}$

(*c*) están a 3 unidades del eje x

(*d*) están a 5 unidades abajo del eje x

(*e*) están a 4 unidades del eje y

(*f*) están a 3 unidades de la recta $x = 2$

(*g*) están a 6 unidades arriba de la recta $y = -2$

(*h*) están a 1 unidad a la derecha del eje y

(*i*) son equidistantes de las rectas $x = 5$, $x = 13$

40. Determine la ecuación del lugar geométrico del centro de un círculo que: (12.18)

(*a*) es tangente al eje x en (6,0)

(*b*) es tangente al eje y en (0,5)

(*c*) es tangente a las rectas $x = 4$, $x = 8$

(*d*) pasa por el origen y por (10,0)

(*e*) pasa por (3,7) y por (9,7)

(*f*) pasa por (3,−2) y por (3,8)

41. Determine la ecuación de la recta o parejas de rectas que son el lugar geométrico de puntos tales que: (12.16)

(*a*) sus coordenadas son iguales

(*b*) su ordenada es cinco veces mayor que su abscisa

(*c*) su abscisa es cuatro veces menor que su ordenada

(*d*) su ordenada excede a su abscisa por 10 (*e*) la suma de sus coordenadas es 12

(*f*) la diferencia de sus coordenadas es 2

(*g*) son equidistantes del eje x y del eje y

(*h*) son equidistantes de $x + y = 3$ y de $x + y = 7$

42. Describa el lugar geométrico de cada una de las siguientes ecuaciones: (12.17)

(*a*) $y = 2x + 5$ (*c*) $\dfrac{y+3}{x+2} = \dfrac{5}{4}$ (*e*) $x + y = 7$

(*b*) $\dfrac{y-3}{x-2} = 4$ (*d*) $y = \frac{1}{2}x$ (*f*) $3y = x$

43. Determine la ecuación de la recta que pasa por el origen y tiene pendiente de: (*a*) 4; (*b*) -2; (*c*) $\frac{3}{2}$; (*d*) $-\frac{2}{5}$; (*e*) 0 (12.17)

44. Determine la ecuación de una recta con ordenada al origen de: (12.17)

(*a*) 5 y pendiente 4 (*d*) 8 y es paralela a $y = 3x - 2$

(*b*) 2 y pendiente -3 (*e*) -3 y es paralela a $y = 7 - 4x$

(*c*) -1 y pendiente $\frac{1}{3}$ (*f*) 0 y es paralela a $y - 2x = 8$

45. Determine la ecuación de una recta con pendiente 2 y que pasa por (*a*) (1,4); (*b*) (-2,3); (*c*) (-4,0); (*d*) (0,-7)

46. Determine la ecuación de la recta que: (12.17)

(*a*) pasa por el origen y tiene pendiente 4

(*b*) pasa por (0,3) y tiene pendiente $\frac{1}{2}$

(*c*) pasa por (1,2) y tiene pendiente 3.

(*d*) pasa por (-1,-2) y tiene pendiente $\frac{1}{3}$

(*e*) pasa por el origen y es paralela a una recta con pendiente 2

47. (*a*) Describa el lugar geométrico de la ecuación $x^2 + y^2 = 49$ (12.18)

(*b*) Determine la ecuación del lugar geométrico de los puntos que están a 4 unidades del origen.

(*c*) Determine la ecuación del lugar geométrico de los puntos a 3 unidades del lugar geométrico de $x^2 + y^2 = 25$.

48. Determine la ecuación del lugar geométrico de los puntos a 5 unidades de: (*a*) el origen; (*b*) el círculo $x^2 + y^2 = 16$; (*c*) el círculo $x^2 + y^2 = 49$. (12.18)

49. ¿Cuál es el radio de un círculo cuya ecuación es: (*a*) $x^2 + y^2 = 9$; (*b*) $x^2 + y^2 = \frac{16}{9}$; (*c*) $9x^2 + 9y^2 = 36$; (*d*) $x^2 + y^2 = 3$? (12.18)

50. Determine la ecuación del círculo con centro en el origen y cuyo radio es: (*a*) 4; (*b*) 11; (*c*) $\frac{2}{9}$; (*d*) $1\frac{1}{2}$; (*e*) $\sqrt{5}$; (*f*) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. (12.18)

51. Calcule el área del $\triangle ABC$ cuyos vértices son $A(0,0)$ y: (12.19)

(*a*) $B(0,5)$ y $C(4,5)$	(*c*) $B(0,8)$ y $C(-5,8)$	(*e*) $B(6,2)$ y $C(7,0)$
(*b*) $B(0,5)$ y $C(4,2)$	(*d*) $B(0,8)$ y $C(-5,12)$	(*f*) $B(6,-5)$ y $C(10,0)$

52. Calcule el área de: (12.19)

(*a*) un triángulo cuyos vértices son $A(0,0)$, $B(3,4)$ y $C(8,0)$

(*b*) un triángulo cuyos vértices son $D(1,1)$, $E(5,6)$ y $F(1,7)$

(*c*) un rectángulo con vértices adicionales $H(2,2)$, $J(2,6)$ y $K(7,2)$

(*d*) un paralelogramo con vértices adicionales $L(3,1)$, $M(9,1)$ y $P(5,5)$.

53. Calcule el área del $\triangle DEF$ cuyos vértices son $D(0,0)$ y: (*a*) $E(6,4)$, $F(8,2)$; (*b*) $E(3,2)$ y $F(6,-4)$; (*c*) $E(-2,3)$ y $F(10,7)$ (12.20)

54. Calcule el área del triángulo cuyos vértices son: (*a*) (0,0), (2,3) y (4,1); (*b*) (1,1), (7,3) y (3,6); (*c*) (−1,2),(0,−2) y (3,1). (12.20)

55. Los vértices del $\triangle ABC$ son $A(2,1)$, $B(8,9)$ y $C(5,7)$. (*a*) Calcule el área del $\triangle ABC$. (*b*) Calcule la longitud de $\overline{AB}$. (*c*) Calcule la longitud de la altura a $\overline{AB}$. (12.20)

56. Calcule el área del cuadrilátero cuyos vértices son: (*a*) (3,3), (10,4), (8,7) y (5,6); (*b*) (0,4), (5,8), (10,6) y (14,0); (*c*) (0,1), (2,4), (8,10) y (12,2) (12.20)

57. Calcule el área del cuadrilátero formado por las rectas: (12.19)

(*a*) $x = 0, x = 5, y = 0, y = 6$

(*b*) $x = 0, x = 7, y = -2, y = 5$

(*c*) $x = -3, x = 5, y = 3, y = -8$

(*d*) $x = 0, x = 6, y = 0, y = x + 1$

(*e*) $y = 0, y = 4, y = x, y = x + 4$

(*f*) $y = 0, y = 2x, y = 2x + 6$

58. Demuestre cada uno de los incisos siguientes mediante el uso de los principios de geometría analítica:(12.21)

(*a*) un segmento de recta que une los puntos medios de dos de los lados de un triángulo, es paralelo al tercer lado.

(*b*) las diagonales de un rombo son perpendiculares entre sí.

(*c*) la mediana a la base de un triángulo isósceles es perpendicular a la base.

(*d*) la longitud del segmento de recta que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es igual a la mitad de la longitud del tercer lado.

(*e*) si los puntos medios de los lados de un rectángulo tomados es sucesión se unen, entonces el cuadrilátero formado es un rombo.

(*f*) en un triángulo rectángulo, la longitud de la mediana a la hipotenusa es la mitad de la longitud de la hipotenusa.